Ғылыми мақала

ҒТАМР 27.35.17 https://doi.org/10.55956/QTQI1880

Ш. Қ. Егемберді
Математика магистрі, аға оқытушы
М.Х. Дулати атындағы Тараз университеті,
Тараз қаласы, Қазақстан
shk.egemberdi@dulaty.kz

ГАЗ ДИНАМИКАСЫНА АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕРДЕ БОЛЬЦМАН ТЕҢДЕУІН ҚОЛДАНУДЫҢ ТӘСІЛДЕРІ

Аңдатпа *Газ динамикасының макроскопиялық теңдеулері үшін қатты қабырғадағы шекаралық шарттарды ескеру тәсілі ұсынылады. Бұл тақырып газ динамикасының микроскопиялық және макроскопиялық деңгейлері арасындағы байланысты зерттейтін маңызыды бағытты қамтиды. Газ динамикасының күрделі есептерін шешудегі Больцман кенетикалық теңдеуінің рөлі мен оны қолданудың заманауи әдістері қарастырылады. Макроскопиялық Навье-Стокс теңдеулері өз күшін жоятын жағдайларда (Кнудсен саны жоғары болғанда), газ ағынын сипаттаудың негізгі құралы ретінде Больцман теңдеуінің маңыздылығы негізделген. Бұл тәсіл Больцман теңдеуі үшін шекаралық есептердің қойылымымен келісілген. Нәтижесінде газ динамикасының теңдеулерінің жаңа түрі алынады. Мақаланың қорытындысында Больцман теңдеуін қолдану арқылы алынған нәтижелердің дәлдігі мен есептеу ресурстарны оңтайландыру жолдары туралы тұжырымдар берілген. Нәтижесінде шекаралық бетте масса, импульс, энергия ағындарының бар болу мүмкіндігіне жол беріледі және Больцман теңдеуі үшін макроскопиялық шекаралық шарттардан моменттің теңдеулер үшін макроскопиялық шекаралық шарттарға дәйекті көшу жүзеге асырылады.*

Тірек сөздер: *Больцман теңдеуі, кинетикалық теория, газ динамикасы, таралу функциясы, молекулааралық соқтығысу, шашырау ядросы, шекаралық шарт.*

Кіріспе. $f = f(x, v, t)$ – Больцман теңдеуіне бағынатын газ молекулаларының таралу функциясы болсын.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (fv) = Q(f, f) \qquad (1)$$

Мұнда: t- уақыт, v –молекула жылдамдығы, $Q(f, f)$- молекула-аралық соқтығусылар интегралы. Больцман теңдеуінің кез келген қорытындысында физикалық кеңістіктегі x бақылау нүктесі газды шектейтін қатты беттерден осыншалықты алыс орналасқан. Сондықтан, (1) теңдеуінде молекула-лардың қабырғамен соқтығусуы кезіндегі таралу функциясының өзгеруін ескеретін мүшелер жоқ деген болжам бар [1]. Аталған физикалық толық еместікті жою үшін қатты беттердегі (1) кинетикалық теңдеуіне әдетте келесі түрдегі интегралдық түрлендірудің көмегімен беттің қасиеттерін сипаттайтын $W(v', v, x)$ шашырау ядросы енгізіледі.

$$|v_n| f_W(x, v, t) = \int_{v_{n^2<0}} W\big((v', v, x)\big) |v_n'| f(x, v', t) d\, v', v_n = vn > 0 \qquad (2)$$

Мұнда f_W- қатты шекаралық беттен ұшып шығатын молекулалардың таралу функциясы; n – газ жаққа бағытталған дене бетіне жүргізілген нормал болып табылады. (2) шартынан бөлек, (1) теңдеуі үшін есептерді қою кезінде бастапқы f_H - уақыт сәтіндегі таралу функциясы, сондай-ақ газ ағынының аймағын шектейтін, бірақ қатты қабырға арылы емес, газ арқылы өтетін беттердегі шарттар беріледі.

Газдың қозғалысын микроскопиялық сипаттаудан қандай да бір анықталған моменттік әдіс шеңберінде макроскопиялық сипаттауға көше отырып, (2) теңдеуден қатты дене шекарасында орындалуы тиіс қатынастардың шексіз жүйесін алуға болады. [1] Бұл қатынастар қабырғаға түсетін және одан шағылысатын молекулалар үшін таралу функциясы моменттерінің ағындарын байланыстырады. Мақсат - моменттік теңдеулер үшін шекаралық есепті қою мақсатында, осы шексіз жүйенің ішінен қанша және қандай қатынсатарды таңдап алу қажеттілігінде болып табылады. Ал олардың математикалық қасиеттері әлі жеткілікті толық зерттелмеген.

Нақты есеперде моменттік әдістерді іс жүзінде қолдану кезінде, бұл есепті шешудің ыңғайлылығы мен қарапайымдылығына қарай сүйене отырып шешіп отырған [2].

[2]-[3] еңбектерінде физикалық және математикалық тұйықтық-ты біріктіру принципі ұсынылған. Тиісті моменттік теңдеулер – бұл молекулалық белгінің теңгерім теңдеулері болғандықтан, қатты дене шекарасында физикалық тұйықтықты қамтамасыз ету үшін қанша теңдеу пайдаланылса, сонша шартты (моменттер ағынын) беру қажет.

Зерттеу шарттары мен әдістері. Анықталу облысында шектелген $f(x, v, t)$ таралу функциясын табу үшін есеп шарты келесі түрде қойылады. Мұнда $t \in [0, T_1], V -$ газбен толтырылған газ жаққа бағытталған, *n* нормалы бар *S* шекарасымен қоршалған тұйық облыс, ал $\Omega -$молекулалардың барлық мүмкін жылдамдықтарының кеңістігі болып табылады. Бұл ретте *S* шекарасының S_W деп белгіленген бөлігі қатты денелердің бетімен сәйкес келеді, ал оның екінші бір S_K бөлігі газ арқылы өтеді, сонымен қатар, газ ол арқылы еркін түрде өте алады. Шекараны екі бөлікке бөлу орынды, себебі газ арқылы өтетін бет арқылы өтетін шамалар ағыны тек газдың қасиеттерімен анықталады., ал фазалардың бөліне беттері арқылы өтетін шамалар ағыны сонымен қатар, қатты дененің қасиеттерімен де анықталады.

Төменде моменттік теңдеулер үшін шекаралық есептерді қоюдың тәсілі баяндалады. Бұл тәсіл кеңейтілген Больцман теңдеуін пайдалануға негізделген [4]. Бұл әдіс молекулалардың таралу функциясының шекаралық бетте тек физикалық координаталар кеңістігінде ғана емес, сонымен қатар молекулалардың жылдамдықтар кеңістігінде де үзілісті болуын болжайды.

f функциясы *V* облысының ішінде және сыртында *x* бойынша үзіліссіз, ал S_W үзіліске ұшырайды деп жориық. Бұл ретте f шектік мәндерге ие болады:$f_+ - S_W$ бетіің газға қараған ішкі жағындағы мәні және $f_- -$ сыртқы жағындағы мәні болып табылады. Ω молекулалардың жылдамдықтар кеңістігінде f функциясы 1 текті үзілістерге ие болуы керек. Басқаша айтқанда, $f(x, v, t)$ – анықталу облысындағы шекті вариация функциясы болады [6].

$t = 0$ уақыт сәтінде таралу функциясы белгілі және $f_н$- қа тең. $S_К$ – арқылы *V* облысына енетін молекулалардың таралу функциясы берілген және $f_к$ тең.

$$f(x,v,0) = f_H, f(x_k,v,t) = \begin{cases} f, v_n < 0, \\ f_k, v_n > 0, \end{cases} x_k \in S_k$$

$$f_- \equiv f(x_{w-0},v,t) = f(x_w,v,t) = 0, x_W \in S_{W,} \qquad (3а)$$

$$f_+ \equiv f(x_{w+0},v,t) = \begin{cases} f, v_n < 0 \\ f_w, v_n > 0 \end{cases} \qquad (3б)$$

Мұнда $f_w -$ мәні (2) өрнегінің көмегімен қабырғаға түсетін молекулалардың таралу функциясы және W (v',v,x)- шашырау ядросы арқылы анықталады.
f таралу функциясы тек газ молекулаларының өзара әрекеттесуін ғана емес, сонымен қатар, олардың қатты денемен әрекеттесуін де ескеретін кеңейтілген немесе жалпыланған кинетикалық теңдеуге бағынады [7]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (fv) = Q(f,f) + J(f,f_w) \qquad (4)$$

4) теңдеуінің оң жағында $J(f,f_w)$ қосымша мүшесі, молекула-аралық соқтығысулар интегралы $Q(f,f)$ сияқты, көз мағынасы ие, бірақ ол газ молекулаларының қатты дене шекарасымен соқтығысуы есебінен таралу функциясының өзгеруін анықтайды.

Таралу функциясы көздерінің $J(f,f_w)$ көлемдік тығыздығы $Q(f,f)$ беттік тығыздығымен қарапайым қатынас арқылы байланысады:

$$J(f,f_w) = j_w \delta_+(h_w), j_w = v_n f_+ \qquad (5)$$

Мұнда: $h_w = \inf_{x_W}|x - x_W|$, δ_+- ассиметриялық дельта – функция, ол келесі өрнекпен анықталады:

$$\int_{a+0}^{b} f(y)\delta_+(y-A)dy = \begin{cases} 0, & A < a, A \geq b, \\ f(A+0), & a \leq A < b, \end{cases} a < b$$

.

(5) формуладағы f_+ функциясының түрі (3б) өрнегімен беріледі. Қабырғаға түсетін молекулалар $v_n < 0$ үшін (4) теңдеудегі $J(f,f_w)$ мүшесі төгу ағынын анықтайды, ал шағылысқан молекулалар үшін - S_W шекарасындағы таралу функциясының көзін анықтайды. Айта кететін жайт, (4) теңдеудегі $\frac{\partial}{\partial x}$ – операторы Остроградский – Гаусс теоремасы орындалатын үзіліс беттеріндегі дивергенция ұғымының жалпылануын білдіреді [6].

J мүшесінің физикалық мағынасын (4) теңдеуін өлшемі шекті ұяшық үшін жазу арқылы түсіну оңай, (4) теңдеуінің ұяшық көлемі τ бойынша Остроградский – Гаусс теоремасын қолдана отырып, интегралдау келесі теңдеуге алып келеді:

$$\frac{\partial <f>}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\oiint_{\sigma} vfd\tau = < Q > + < J >, \quad < J > = < j_w \delta_+(h_w) > \qquad (6)$$

Мұнда көлем бойынша орташа белгісі қолданылғын:

$$< \varphi > = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} \varphi d\tau,$$

а σ- τ көлемін шектейтін бет болып табылады. Егер - τ-интегралдау облысы газдың ішінде орналасады және S_W бетінде нүктелер болмаса, онда $h_w \neq 0$ және $< J >$ қосылғышы нөлге айналады.Ал егер σ ұяшықтың σ_w шекаралық бетінің бір бөлігі τ қатты дененің шекаралық бетімен сәйкес келген жағдайда, $< J >$ қосылғышы келесі түрге түрленеді:

$$< J > = \frac{1}{\tau} \oiint_{\sigma_W} j_W d\sigma = \frac{1}{\tau} \oiint_{\sigma_W} v_n f_+ d\sigma,$$

.

яғни, бұл таралу функциясының шекаралық бет арқылы өтетін ағынын анықтайды. (6) теңдеуінің сол жағындағы тиісті мүшемен салыстыру көрсеткендей, (3а) шартында көрсетілгендей есептің қойылымына енгізу таралу функция-сының S_W шекарасы арқылы өтетін ағынының теңгерімі (4) немесе (6) теңдеулерінде тек бір рет ескерілуі үшін қажет.

Біртекті шекаралық (3а) шартты физикалық тұрғыдан фиктивті (ойдан шығарылған) деп қарастыру керек, ал (2) қатты шекаралық беттердегі нақты физикалық шарт (4) теңдеуінің өзінде қамтылған.

Зерттеу нәтижелері және талқылау. $\psi = m, mv, \frac{mv^2}{2}$ және тағы сол сияқты молекулалық белгілері бойынша (3) пен (5) формулалардың толық жылдамдықтар кеңістігі бойынша интегралдау арқылы тиісті моменттік теңдеулер үшін шекаралық есепті алу қиын емес. Мұнда S_K бетінде шарттарды қою тәсілі қарастырылмайды. Қажет болған жағдайда бұл бетте шарттарды қою үшін S_W беті үшін пайдаланылған амалды қолдануға болады.

Моменттік теңдеулердің жаңа жалпы түрі былай жазылады:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi f dv + \int \psi \frac{\partial}{\partial x} \cdot (f v) = Q_\psi + J_\psi \tag{7а}$$

$$Q_\psi = \int \psi Q(f, f) dv, \qquad J_\psi = j_\psi \sigma_+ (h_W), \qquad j_\psi = \int j_W \psi dv, \tag{7б}$$

Мұндағы: j_ψ – $\int \psi$ молекулалық белгісіне сәйкес келетін моменттер көздерінің беттік тығыздығы болып табылады. (3б) мен (5) анықтамала-рындағы j_ψ жылдамдықтардың толық кеңістігі бойынша интегралды екі бөлікке бөліп, (3б) мен (5) шарттарын қолдана отырып, шекарлық беттерде қарастырылып отырған моментте j_ψ^+ көздерінің тығыздығы мен j_ψ^- ағынан бөліп көрсетуге болады:

$$j_\psi = j_\psi^- + j_\psi^+, \quad j_\psi^-(x, t) = \int_{v_n < 0} v_n f \psi dv, \tag{8а}$$

$$j_\psi^+(x, t) = \int_{v_n > 0} v_n f \psi dv, \tag{8б}$$

f таралу функциясының түрін, W шекаралық шарттар моделін және молекулалық белгілер ψ жиынтығын мәндерін бере отырып, кез келген моменттік әдіс үшін ізделінді теңдеулерді алуға болады. Дербес жағдайда таралу функциясының нөлдік, бірінші және тағы басқа жуық мәндерін Чепмена-Энскога әдісі Эйлер газдарының қозғалысын сипаттайтын газдық динамиканың теңдеуіне алып келеді. Алғашқы бес молекулалық белгілер – молекула-аралық соқтығысулардың инвариант-тары үшін масса, импульс және энергия балансының теңдеулер жүйесі клесідей түрде болады:

f таралу функциясының түрін, W шекаралық шарттар моделін және молекулалық белгілер ψ жиынтығын мәндерін бере отырып, кез келген моменттік әдіс үшін ізделінді теңдеулерді алуға болады. Дербес жағдайда таралу функциясының нөлдік, бірінші және тағы басқа жуық мәндерін Чепмена-Энскога әдісі Эйлер газдарының қозғалысын сипаттайтын газдық динамиканың теңдеуіне алып келеді. Алғашқы бес молекулалық белгілер – молекула-аралық соқтығысулардың инвариант-тары үшін масса, импульс және энергия балансының теңдеулер жүйесі клесідей түрде болады:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = j_m \sigma_+(h_W), \quad (9а)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \otimes u + P) = j_u \sigma_+(h_W), \quad (9б)$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla(q + \rho e u + uP) = j_e \sigma_+(h_W), \quad (9в)$$

Мұндағы: ρ – тығыздық, u - газ жылдамдығы, $e = E + \frac{u^2}{2}$ – меншікті энергия, E-масса бірлігіндегі ішкі энергия, P- кернеулер тензоры, q – жылу ағынының тығыздық векторы, j_m, j_u, j_e – сәйкесінше масса, импульс және энергия көздерінің беттік тығыздықтары.

Бұл газодинамика есептерін әмбебап шешу әдісінің алгоритміне өңдеуге мүмкіндік береді. Бұл алгоритм ағымның шекті айырымдық әдісіне алып келеді [5]. Ал, оның модификациясы – жартылай әдісі [8] әдебиетте сиаптталған.

Мысал ретінде Эйлер газы моделі үшін масса, импульс және энергияның беттік тығыздықтары алынған. Мұнда таралу функциясы f тығыздығы ρ, жылдамдығы u және температоурасы T болатын жергілікті максвелдік деп аталып, келесі формула арқылы есептелінеді:

$$f = \frac{\rho}{(2\pi R_0 T)^{3/2}} exp\left(-\frac{(v-u)^2}{2R_0 T}\right), \quad (10)$$

Мұнда: $R_0 -$ газ тұрақтысы. Қатты дене бетінде шашыраған молекула-лардың еркін үлесі f_w болатын максвелдік [1] шекаралық шарттар орындалады. (10) өрнегін (8) теңдеуге қойып, жылдамдықтар кеңістігі бойынша интегралдау келесі арақатынастарға әкеледі:

$$j_m = \varepsilon\, j_m^- + \varepsilon \rho_c \left(\frac{R_0 T_c}{2\pi}\right)^{1/2}, \quad j_u = (2-\varepsilon)\, j_u^- + \varepsilon \rho_c \left(\frac{R_0 T_c}{2\pi}\right)^{1/2}, \quad (11\ а)$$

$$j_w = \varepsilon\, j_w^-,\ \ j_e = \varepsilon j_e^- + \gamma\rho_c R_0 T_c (2R_0T_c/\pi)^{1/2} \qquad (11\ б)$$

$$j_m^- = -\rho\{F(u) - u\Phi(u)\}/2, \qquad (11\ в)$$

$$j_u^- = \rho\{-uF(u) + (u^2 + R_0T)\Phi(u)\}/2,$$
$$j_w^- = -\frac{\rho w\{F(u) - u\Phi(u)\}}{2} = j_m^- w, \qquad (11\ г)$$

$$j_e^- = \rho\left\{\left(\frac{u^2}{2} + 2R_0T\right)F(u) - u\left(\frac{u^2}{2} + \frac{5}{2R_0T}\right)\Phi(u)\right\}2, \qquad (11\ д)$$

Бұл жерде $T_c -$ қабырға температурасы, $u -$ газдың орташа жылдамдығының қалыпты құраушысы, $w -$ тангенциалдық құрашы, ал F пен Φ келесі қатынсатар арқылы анықталады:

$$F(u) = (2R_0T/\pi)^{1/2} exp[-u^2(2R_0T)^{-1}],$$

$$\Phi(u) = erfc\left[u(2R_0T)^{-1/2}\right]$$

(11) өрнегіндегі молекула-лардың қабырғамен соқтығысу жиілігн анықтайтын белгісіз ρ_c функциясы газдың $u, \rho,\ T$ параметрлері арқылы қабырғада заттың жинақталмау шартынан, яғни j_m=0 шартынан оңай өрнектеліп табылады, себебі өткізбейтін шекара үшін беттік масса көзі (ағыны) нөлге тең.Газдың басқа модельдері мен қатты беттердің модельдері үшін (11) өрнектерін жалпылау әдісі айқын.

Қорытынды. Қорытындылай келе, шекаралық есептерді қоюдың ұсынылған әдісі шекаралық және кинетикалық қабаттар туралы түсініктерді пайдалану мүмкіндігі жоққа шығармайтынын атап өту қажет. Сондай- ақ, газодимнамика теңдеулері үшін шекаралық шарттарды, мысалы, дәстүрлі тәсілдермен қою мүмкіндігі де жоққа шығарылмайды.

Осы жұмыста баяндалған макроскопиялық газодинамиканың шекаралық есептерін қоюдың ерекшеліктері келесі кезеңдермен шартталған: біріншіден, алынған (7), (9), (11) жалпаланған теңдеулерде шекарада орын алатын физикалық процестерді ескереді. Үзіліс беті болып табылатын шекаралық бетте масса, импульс, энергия ағындарының бар болу мүмкіндігіне жол беріледі; екіншіден, Больцман теңдеуі үшін макроскопиялық шекаралық шарттардан моменттің теңдеулер үшін макроскопиялық шекаралық шарттарға дәйекті көшу жүзеге асырылады.

Әдебиеттер тізімі

1. Черный, Г.Г. Газовая динамика, М.: Наука, 2008. – 424 С.
2. Четверушкин, Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике, М.: Издательство МГУ, 2012. – 240 С.
3. Баранцев, Р.Г. О граничных условиях для уравнений Навье Стокса в разреженном газе [Мәтін] / Р.Г. Баранцев, М.О. Луцет // Докл. АН СССР. 1967. – Т. 173. – № 5. – С.1021-1023.
4. Елизарова, Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений [Мәтін] / М.: Научный мир. – 2007. – 352 С.
5. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред [Мәтін] / О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин // М.: Наука. – 2011. – 448 С.

6. Полянин, А.Д. Справочник для инженеров и студентов: Высшая математика. Физика. Теоретическая механика, М.: АСТ, 2009. – 768 с.
7. Шахов, Е.М. Методы исследования движений разреженного газа, М.: Физматлит. – 2010. – 272 с.
8. Аристов, В.В. Метод прямых численных решений уравнения Больцмана, М.: ВЦ РАН. – 2001. – 192 с.

Ш. К. Егемберді

Университет имени М. Х. Дулати, Тараз, Казахстан

МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ГАЗА

Аннотация. Для макроскопических уравнений газовой динамики рекомендуется учитывать пограничные условия в твердой стене. Эта тема охватывает важное направление, изучающее связь между микроскопическим и макроскопическим уровнями газовой динамики. В решении сложных расчетов динамики газа рассматривается роль кенетического уравнения Больцмана и современные методы его применения. В тех случаях, когда макроскопические уравнения Навье-Стокса теряют свою силу (когда число Кнудсена велико), обосновывается важность уравнения Больцмана как основного средства характеристики газового потока. Этот подход согласован с постановкой пограничных расчетов для уравнения Больцмана. В результате получается новый вид уравнений динамики газа. В заключение статьи даны выводы о точности полученных результатов с использованием уравнения Больцмана и путях оптимизации вычислительных ресурсов. В результате допускается возможность наличия массы, импульса, перетоков энергии на пограничной поверхности и осуществляется последовательный переход от макроскопических пограничных условий для уравнения Больцмана к макроскопическим пограничным условиям для уравнения момента.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, кинетическая теория, газовая динамика, функция распространения, межмолекулярное столкновение, ядро рассеяния, пограничные условия.

Sh.**K.** Egemberdi
M. H. Dulati University, Taraz, Kazakhstan

METHODS FOR USING THE BOLTZMANN EQUATION IN GAS DYNAMICS CALCULATIONS

Abstract. For macroscopic gas dynamics equations, it is recommended to consider boundary conditions in a solid wall. This topic covers an important area studying the relationship between microscopic and macroscopic levels of gas dynamics. In solving complex calculations of gas dynamics, the role of the Boltzmann kenetic equation and modern methods for its application are considered. In cases where the macroscopic Navier-Stokes equations lose their strength (when the Knudsen number is large), the importance of the Boltzmann equation as the main means of characterizing the gas flow is justified. This approach is consistent with setting boundary calculations for the Boltzmann equation. The result is a new kind of gas dynamics equations. In conclusion, conclusions are drawn about the accuracy of the results obtained using the Boltzmann equation and ways to optimize computational resources. As a result, the possibility of mass, momentum, energy flows on the boundary surface is allowed and a sequential transition is made from macroscopic boundary conditions for the Boltzmann equation to macroscopic boundary conditions for the moment equation.

Key words: Boltzmann equation, kinetic theory, gas dynamics, propagation function, intermolecular collision, scattering core, boundary conditions.

References

1. Cherny G.G. Gazovaya dinamika [Gas dynamics], M.: Nauka. 2008.. 424 p. [in Russian]
2. Chetverushkin B.N. Kineticheski-soglasovannyye skhemy v gazovoy dinamike [Kinetic-consistent schemes in gas dynamics], M.: Moscow State University Publishing House. 2012. 240 p. [in Russian]
3. Barantsev R.G., Lutset M.O. O granichnykh usloviyakh dlya uravneniy Nav'ye Stoksa v razrezhennom gaze [On boundary conditions for Navier Stokes equations in rarefied gas] //Docl. USSR ACADEMY OF SCIENCES. 1967. T.173. No.5. P.1021-1023. [in Russian]
4. Elizarova T.G. Kvazigazodinamicheskiye uravneniya i metody rascheta vyazkikh techeniy [Quasigasodynamic equations and methods for calculating viscous currents], M.: Scientific world, 2007. 352 p. [in Russian]
5. Belotserkovsky O.M., Oparin A.M. Chislennoye modelirovaniye v mekhanike sploshnykh sred [Numerical modeling in continuum mechanics]. M.: Nauka, 2011. 448 p. [in Russian]
6. Polyanin A.D. Spravochnik dlya inzhenerov i studentov [Handbook for engineers and students]: Higher mathematics. Physics. Theoretical mechanics, M.: AST, 2009. 768 p. [in Russian]
7. Shakhov E.M. Metody issledovaniya dvizheniy razrezhennogo gaza [Methods for studying the movements of rarefied gas], M.: Fizmatlit, 2010. 272 p. [in Russian]
8. Aristov V.V. Metod pryamykh chislennykh resheniy uravneniya Bol'tsmana [Method of direct numerical solutions of the Boltzmann equation], M.: VTs RAS, 2001. 192 p. [in Russian]

26.02.2026 *ж. баспаға түсті*
30.03.2026 *ж. басып шығаруға қабылданды*

Мақалаға сілтеме: