

М.А.Ахметжанов* 

*Физика-математика ғылымдарының кандидаты, «Қолданбалы информатика және бағдарламалау» кафедрасының қауымдастырылған профессор м.а.,
М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті
Тараз, Қазақстан
madiktz@mail.ru*

Г.К.Дуйсебаева 

*Магистр, Қолданбалы математика және физика» кафедрасының аға оқытушысы,
М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті
Тараз, Қазақстан
gulzhankatz@mail.ru*

ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫН ЗЕРТТЕУДЕ КОМПЬЮТЕРЛІК МАТЕМАТИКАЛЫҚ БАҒДАРЛАМАЛАРДЫ ҚОЛДАНУ

Аңдатпа: Қатарлар теориясын компьютерлік математикалық бағдарламаны пайдаланып қамтамасыз ету зерттелді. Зерттеу барысында сандық және функционалдық қатарларды жинақтауға арналған зерттеу кодтары және Maple-де Тейлор қатары бойынша бір айнымалының функцияларын визуалды жуықтау әдісі әзірленді.

Тірек сөздер: қатарлар, Тейлор қатары, жинақтылық, сандық қатарлар, функционалдық қатарлар.

Кіріспе. Инженерлік-экономикалық саладағы математикалық есептерді шешу үшін пайдаланылатын құралдар қазіргі таңда қуатты компьютерлік математика жүйелерінің пайда болуымен байланысты революциондық өзгерістердің төртінші кезеңін бастан кешіріп жатыр. MathCad, Mathematica, Mathlab, Derive, Theorist, Maple, т.б. компьютерлік математика жүйелерінің көмегімен ауқымды, бір типті, бір амалды бірнеше рет қайталауды қажет ететін есептерді шешуде өте тиімді әрі ыңғайлы рөл атқарады.

Қатарлар теориясын қолдану өте қарапайым болғанымен, оны қолдану арқылы есептерді шешу процесі есептеу сипатындағы күнделікті

есептеулермен бірге жүреді. Қазіргі заманғы компьютерлік технологиялардың дамуы есептеулердің күрделілігін азайту тұрғысынан ұтымды әдістерді қолдануға мүмкіндік береді. Қазіргі заманғы компьютерлік технологиялардың дамуы есептеулердің күрделілігін азайту тұрғысынан ұтымды әдістерді қолдануға мүмкіндік береді. Тиімді әдістердің бірі – компьютерлік математикалық жүйелерде теориялық аспектілерді жүзеге асыратын аралас әдістерді қолдану.

Зерттеу шарттары мен әдістері. Тейлор формуласының қалдық мүшесі $R_n(x)$ деп белгіленген, айырмасы $f(x) - P_n(x)$ болғанда:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \quad (1)$$

(1) – $f(x)$ үшін n -ретті $(x - x_0)$ дәрежелі Тейлор формуласы.

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

мән беру керек. $R_n(x)$ қалдық мүшесі формулада бағалау үшін қажет, яғни Тейлор көпмүшелігі қаншалықты ақиқат болса, бұл функцияны жеңілдетеді [1].

Маклерон формуласы $x_0 = 0$ болғандағы Тейлор қатарының дербес жағдайы:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x)$$

$$\text{Қалдық мүшесі: } R_n(x) = o(x^n), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Қарапайым көпмүшелер қатары $S = \infty$ ретінде Тейлор қатары осы функцияны көрсететін әдіс болып

табылады. a -ның айналасында $f(x)$ -ты қатарға жіктегенде формула мынадай түрге келеді:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$f^{(k)}(x)$ a нүктесіндегі f функциясының n -ретті туындысы.

Осыдан, $f(x) = \ln(x+2)$ бастапқы Тейлор қатары былай белгіленеді:

$$\ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3^2} \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^2} \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау. Maple жүйесінде функцияның Тейлор қатарына жіктелуі $taylor(f(x), x=a, n)$ және $series(f(x), x)$ командаларымен іске

асады. $taylor(f(x), x=a, n)$ командасының орындалуының басты шарты $x=a$ жіктелі нүктесінің бар болуы. n параметрі қатар мүшелерінің санын көрсетеді [2].

$$LN := x \rightarrow \ln(x+2); \quad RT_1 := taylor(LN(x), x=1, 9); \quad RT_2 := series(LN(x), x=1);$$

$$LN := x \rightarrow \ln(x+2)$$

$$RT_1 := \ln(3) + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 - \frac{1}{324}(x-1)^4 + \frac{1}{1215}(x-1)^5 - \frac{1}{4374}(x-1)^6 + \frac{1}{15309}(x-1)^7 - \frac{1}{52488}(x-1)^8 + O((x-1)^9)$$

$$RT_2 := \ln(3) + \frac{1}{3} (x-1) - \frac{1}{18} (x-1)^2 + \frac{1}{81} (x-1)^3 - \frac{1}{324} (x-1)^4 + \frac{1}{1215} (x-1)^5 + O((x-1)^6)$$

n параметрінің $taylor(f(x), x=a, n)$ командасында бар болуы мүшелердің санын бақылауға мүмкіндік береді. Ал, $series(f(x), x)$ командасы орындалғанда мүшелер саны автоматты түрде 6 болады. Бірақ екі команданың да орындалу нәтижесінде қалдық мүшесі бар. Егер есепті шешу барысында өрнекті полиномсыз алу қажет болса,

онда *polynom* параметрі міндетті қойылған *convert* командасы қолданылады:

$$PL_1 := convert(taylor(LN(x), x=1, 9), polynom);$$

$$PL_2 := convert(series(LN(x), x=1), polynom);$$

$$PL_1 := \ln(3) + \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} (x-1)^2 + \frac{1}{81} (x-1)^3 - \frac{1}{324} (x-1)^4 + \frac{1}{1215} (x-1)^5 - \frac{1}{4374} (x-1)^6 + \frac{1}{15309} (x-1)^7 - \frac{1}{52488} (x-1)^8$$

$$PL_2 := \ln(3) + \frac{1}{3} x - \frac{1}{3} - \frac{1}{18} (x-1)^2 + \frac{1}{81} (x-1)^3 - \frac{1}{324} (x-1)^4 + \frac{1}{1215} (x-1)^5$$

Тейлор қатарының дербес жағдайы Маклерон қатары болып табылады, яғни, жіктелу 0-дің айналасында жүзеге асырылады. [3]

Бұл барлық көпмүшеліктер функцияның 0 нүктесіндегі туындысының мәнімен есептелетінін білдіреді:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

f функциясының x_0 нүктесінің айналасындағы қатары $f(x)$ -ке жинақталу үшін:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = S(x), \quad \forall x \in U_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$$

яғни, барлық x үшін x_0 -дің аймағында $S(x) = f(x)$ теңдігі орындалады, егер берілген аймақта $n \rightarrow \infty$ ұмтылғанда, барлық x үшін

қалдық мүшенің шегі $R_n(x) \rightarrow 0$ болуы қажетті және жеткілікті болғанда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

$R_n(x)$ қатардың қалдық мүшесі. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$ болса, онда

берілген қатар жинақталуы мүмкін, бірақ оның қосындысы әрдайым $= f(x)$ бола бермейді.

Зерттеу нәтижелерін талқылау. функциясын x -тің дәрежелері бойынша жіктеңіз.
Мысал қарастырайық. $f(x) = e^x \sin x$

Шешуі. Функцияның $x = 0$ нүктесіндегі туындыларын табайық:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x, & f(0) &= 0; \\ f(x) &= e^x (\cos x + \sin x) = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \\ f'(0) &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}; \\ f''(x) &= (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), & f''(0) &= (\sqrt{2})^2 e^x \sin^2 \frac{\pi}{4}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), & f^{(n)}(0) &= (\sqrt{2})^n e^x \sin \frac{n\pi}{4}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Абсолютті шамаға талдау жасайық. [3]

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi) x^n}{n!} \right| = \left| \frac{(\sqrt{2})^n e^\xi \sin\left(\xi + \frac{n\pi}{4}\right)}{n!} x^n \right| < \frac{(\sqrt{2})^n e^{|\xi|} |x|^n}{n!} = u_n.$$

Сондай-ақ, барлық x үшін $\sum u_n$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1} e^{|\xi|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\sqrt{2})^n e^{|\xi|} |x|^n} = \frac{\sqrt{2} |x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1,$$

сәйкесінше, $\sum u_n$ жинақталады. Сондықтан мындай жіктелуді аламыз:

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$$

Maple бағдарламасындағы есептің шешуін көрсетейік. $f(x) = e^x \sin x$ үшін Маклерон жіктелуі келесі түрде беріледі:

$$F := x \rightarrow \exp(x) \cdot \sin(x); \text{ RM_1 := taylor}(F(x), x = 0, 8); \text{ RM_2 := series}(F(x), x = 0);$$

$$\begin{aligned} F &:= x \rightarrow e^x \sin(x) \\ \text{RM_1} &:= x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 - \frac{1}{90} x^6 - \frac{1}{630} x^7 + O(x^8) \\ \text{RM_2} &:= x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 + O(x^6) \end{aligned}$$

Көріп отырғанымыздай, $taylor$ командасы орындалғанда қатар мүшелерінің саны сұраныстан аз болды. Бұл қатардың кейбір мүшелерінің мәні нөлге тең болғандықтан шығады.

Maple бағдарламасында функцияны қатарға жіктеу кезінде графикалық бейнесін көрсету арқылы да есеп шығаруға болады. Мысал ретінде $y = e^x \cdot \arctg(x)$ функциясын қарас-

тырайық. $n=3$, $n=5$ болғандағы функцияны Маклерон қатарына жіктеп, содан кейін қалдық мүшені полином түрінде жазамыз:

```
f := x -> exp(x) * arctan(x);
RM_3 := taylor(f(x), x = 0, 3);
PL_3 := convert(taylor(f(x), x = 0, 3), polynom);
RM_5 := taylor(f(x), x = 0, 5);
PL_5 := convert(taylor(f(x), x = 0, 5), polynom);
```

$$f := x \rightarrow e^x \arctan(x)$$

$$RM_3 := x + x^2 + O(x^3)$$

$$PL_3 := x^2 + x$$

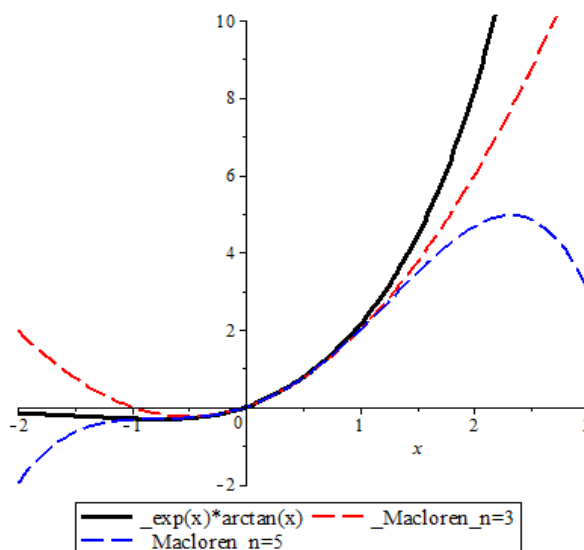
$$RM_5 := x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + O(x^5)$$

$$PL_5 := x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4$$

Бір суретте $y = e^x \cdot \arctg(x)$ функциясын және оның $n=3$, $n=5$

болғандағы жіктелуінің графигін салайық.

```
plot([f(x), PL_3, PL_5], x = -2..3, view = [-2..3, -2..10], color = [black, red, blue], thickness = [3, 2, 2], linestyle = [solid, dash, dash], legend = ["_exp(x) * arctan(x)", "_Macloren_n = 3", "_Macloren_n = 5"]);
```



Сурет 1. $y = e^x \cdot \arctg(x)$ функциясын және оның $n=3$, $n=5$ болғандағы жіктелуінің графигі

Графиктен $(-\frac{1}{2}, 1)$ аралығында грфиктен беттесетінін көруге болады. Аралықтың сол жағынан және оң жағынан үлкен мәндерді алғанда жіктелуі бар графиктер $y = \sin x$

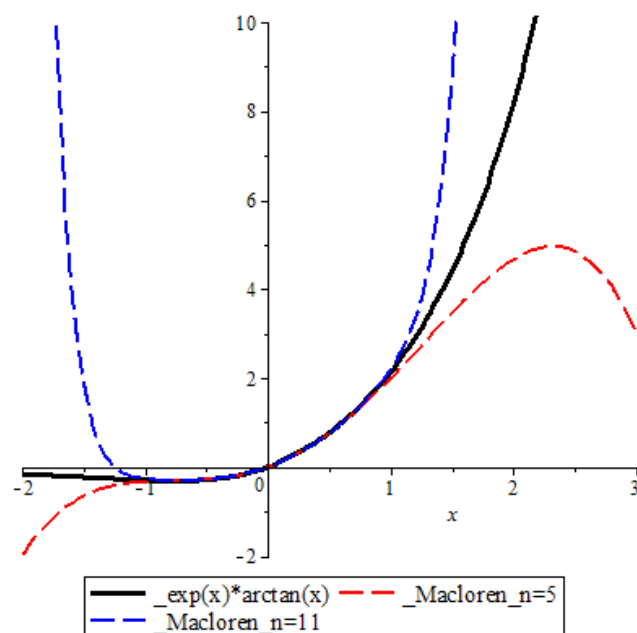
функциясының графигінен қатты алшақтайды.

Қатардың мүшелер санын үлкейтіп, графикті қайта тұрғызамыз:

```
RM_11 := taylor(f(x), x = 0, 11); PL_11 := convert(taylor(f(x), x = 0, 11), polynomial);
plot([f(x), PL_5, PL_11], x = -2..3, view = [-2..3, -2..10], color = [black, red, blue],
    thickness = [3, 2, 2], linestyle = [solid, dash, dash], legend = ["_exp(x)
    ·arctan(x)", "_Macloren_n = 5", "_Macloren_n = 11"]);
```

$$RM_{11} := x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{11}{72}x^6 - \frac{31}{560}x^7 - \frac{113}{1008}x^8 + \frac{1151}{24192}x^9 + \frac{161309}{1814400}x^{10} + O(x^{11})$$

$$PL_{11} := x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{11}{72}x^6 - \frac{31}{560}x^7 - \frac{113}{1008}x^8 + \frac{1151}{24192}x^9 + \frac{161309}{1814400}x^{10}$$



Сурет 2. $y = e^x \cdot \arctg(x)$ функциясын қатардың мүшелер санын үлкейтіп, қайта тұрғызылған графигі

Жіктелу мүшелерінің саны артқанда үлкен мәндер алған кезде графиктердің айырылатынын көруге болады [4].

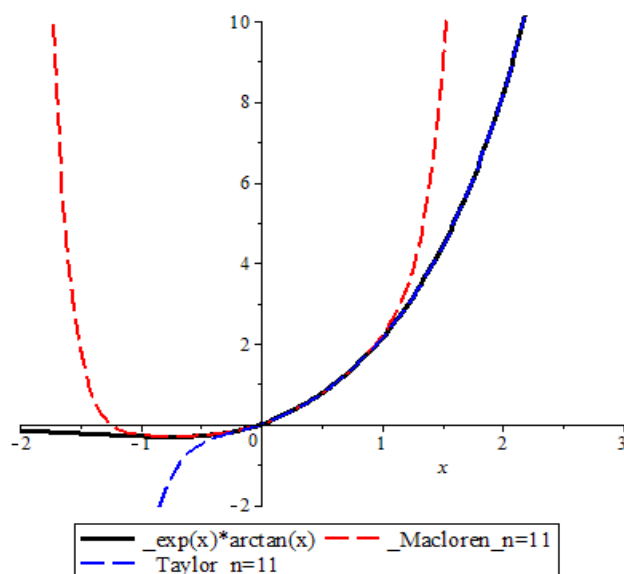
$y = e^x \cdot \arctg(x)$ функциясын $x = 1$ болғандағы Тейлор қатарына жіктейік және $n = 11$ болғандағы Тейлор және Маклерон қатарларына жіктелулердің графигін салайық.

```
RT_11 := taylor(f(x), x = 1, 11); PL_111 := convert(taylor(f(x), x = 1, 11), polynomial);
```

$$RT_{11} := \frac{1}{4} e \pi + \left(\frac{1}{2} e + \frac{1}{4} e \pi \right) (x-1) + \left(\frac{1}{4} e + \frac{1}{8} e \pi \right) (x-1)^2 + \left(\frac{1}{12} e + \frac{1}{24} e \pi \right) (x-1)^3 + \left(\frac{1}{96} e \pi + \frac{1}{24} e \right) (x-1)^4 + \left(-\frac{1}{240} e + \frac{1}{480} e \pi \right) (x-1)^5 + \left(\frac{1}{288} e + \frac{1}{2880} e \pi \right) (x-1)^6 + \left(\frac{1}{672} e + \frac{1}{20160} e \pi \right) (x-1)^7 + \left(-\frac{1}{448} e + \frac{1}{161280} e \pi \right) (x-1)^8 + \left(\frac{367}{241920} e + \frac{1}{1451520} e \pi \right) (x-1)^9 + \left(-\frac{3407}{7257600} e + \frac{1}{14515200} e \pi \right) (x-1)^{10} + O((x-1)^{11})$$

$$PL_{111} := \frac{1}{4} e \pi + \left(\frac{1}{2} e + \frac{1}{4} e \pi \right) (x-1) + \left(\frac{1}{4} e + \frac{1}{8} e \pi \right) (x-1)^2 + \left(\frac{1}{12} e + \frac{1}{24} e \pi \right) (x-1)^3 + \left(\frac{1}{96} e \pi + \frac{1}{24} e \right) (x-1)^4 + \left(-\frac{1}{240} e + \frac{1}{480} e \pi \right) (x-1)^5 + \left(\frac{1}{288} e + \frac{1}{2880} e \pi \right) (x-1)^6 + \left(\frac{1}{672} e + \frac{1}{20160} e \pi \right) (x-1)^7 + \left(-\frac{1}{448} e + \frac{1}{161280} e \pi \right) (x-1)^8 + \left(\frac{367}{241920} e + \frac{1}{1451520} e \pi \right) (x-1)^9 + \left(-\frac{3407}{7257600} e + \frac{1}{14515200} e \pi \right) (x-1)^{10}$$

`plot([f(x), PL_11, PL_111], x=-2..3, view=[-2..3, -2..10], color=[black, red, blue], thickness=[3, 2, 2], linestyle=[solid, dash, dash], legend=["_exp(x)·arctan(x)", "_Macloren_n=11", "_Taylor_n=11"]);`



Сурет 3. $y = e^x \cdot \arctan(x)$ функциясын $n=11$ болғандағы Тейлор және Маклорон қатарларына жіктелулердің графигін салайық.

Қорытынды. Көріп отырғанымыздай, Тейлор қатарының мүшелерінің санының артуы және жіктелу нүктесінің өзгеруі сөзсіз графиктерге әсер етті: олар нүктелердің көпшілігімен сәйкес келе

бастады, бірақ сонымен бірге қатарлар мүшелерінің қателігі өсті. Сондықтан мүшелер санының көбеюі есептеу қателерінің көбеюіне әкеледі. [5]

Әдебиеттер тізімі

1. Никитин А.А. Математический анализ. Углубленный курс. - Люберцы: Юрайт, 2016. – 460 с.
2. Аксенов А.П. Математический анализ в 4 ч., часть 2- Люберцы: Юрайт, 2016. – 344 с.
3. Дьяконов В.П. « Maple 9.5 10 в математике, физике и образовании». Москва: СОЛОН-ПРЕСС, 2017. – 720 с.
4. Карташев А. П. Математический анализ. - М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 2014. – 448 с.
5. Земляков А.Н. Математический анализ реальности. - М.: МЦНМО, 2013. – 360 с.

А.М.А.Ахметжанов, Г.К.Дуйсебаева

Таразский региональный университет имени М.Х.Дулати
Тараз, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОГРАММ В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ РЯДОВ

Аннотация. В статье изучается обеспечение теории рядов с помощью компьютерной математической программы. В ходе исследования были разработаны исследовательские программы суммирования числовых и функциональных рядов и метод визуальной аппроксимации функций одной переменной рядами Тейлора в Maple. **Ключевые слова:** ряды, ряд Тейлора, сходимость, числовой ряд, функциональный ряд.

M.A.Akhmetzhanov, G.K.Duisebayeva

Taraz Regional University named after M.H. Dulaty
Taraz, Kazakhstan

APPLICATION OF COMPUTER MATHEMATICAL PROGRAMS IN THE STUDY OF THE THEORY OF SERIES

Abstract. The article studies the provision of the theory of series using a computer mathematical program. In the course of the study, research programs for summation of numerical and functional series and a method for visual approximation of functions of one variable by Taylor series in Maple were developed.

Keywords: series, Taylor series, convergence, numerical series, functional series.

References

1. Nikitin A.A. Matematicheskii analiz. Uglublennyy kurs. – Ljubercy:Uraight, 2016.-460p.
2. Akseno A.P. Matematicheskii analiz. v 4ch.. 2chast – Ljubercy:Uraight, 2016.-344p.
3. Djakonov V.P. “ Maple 9.5 10 v matematike, fizike I obrazovanii”. Moskva: SLONPRESS, 2017. – 720p.
4. Kartashev A.P. Matematicheskii analiz. – M.: “ Nauka”, 2014. – 448p.
5. Zemlyakov A.N. Matematicheskii analiz realnosti. – M.: MCNMO, 2013. – 360p.

15.02.2026 ж. баспаға түсті

1.07.2026 ж. басып шығаруға қабылданды

Мақалаға сілтеме:



Copyright: © 2024 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).